ОТ ЧАСТНОЙ К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Марк Микитинский

Показано, что Общая Теория Относительности и Теория тяготения Альберта Эйнштейна явились логическим продолжением Специальной (частной) Теории Относительности.

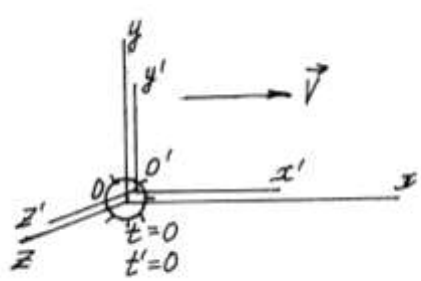
По теории относительности существует многочисленная и разнообразная литература. По ряду причин сведения об этой теории стали распространяться не только среди специалистов – физиков, но быстро стали известными в среде достаточно образованных людей. Это, в частности, относится и к выходцам из бывшего Советского Союза, где образование находилось на высоком уровне.

С другой стороны, конкретные результаты теории относительности слабо воспринимаются неподготовленной аудиторией. Для устранения этого пробела в своё время была издана небольшая брошюра Л.Д. Ландау и Ю.Б. Румера «Что такое теория относительности?» (Издательство «Советская Россия», 1963 г.). Заметим, что в этой брошюре рассмотрены выводы, которые касаются только специальной теории относительности, связанные с движениями в однородном изотропном пространстве с постоянной скоростью и прямолинейной траекторией. Эта часть теории А.Эйнштейна в настоящее время изучается не только в высших, но и в средних учебных заведениях.

Что касается теории тяготения Эйнштейна. благодаря которой теория относительности приобрела широкую известность, в *общих* курсах физики она не изучается во многом из – за того, что для этого требуется владение математическим аппаратом *тензорного* анализа, который даже для университетских физиков является *факультативным* предметом.

Ещё в первой статье Эйнштейна по теории относительности (1905г.) произошёл отказ от понятия *абсолютного* времени, которое существовало со времени Галилея – Ньютона. В том, что временные интервалы в двух *инерциальных* системах отсчёта не совпадают, хотя отсчёт времени был предварительно *синхронизирован*, можно убедиться на следующем примере.

Рассмотрим *неподвижную* систему отсчёта x, y, z (обозначим её S), в начале которой (точка O) находится источник *света*.



В момент $t = 0$ происходит *вспышка*, и луч света в момент t достигает точки x, y, z, пройдя расстояние ct, где c – скорость света. В этом случае имеем уравнение сферического волнового фронта

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 . \qquad (1)$$

Это уравнение описывает *сферическую* поверхность, радиус которой увеличивается со скоростью c .

Обозначим штрихом *движущуюся* систему отсчёта S´ . Координаты и время, измеренные наблюдателем, находящимся в этой системе, обозначаются x´, y´, z´, t´ . Для удобства предположим, что начало отсчёта времени t´ совпадает с началом отсчёта времени t в *неподвижной* системе и что в этот *совпадающий* момент *начало* координат системы S´ совпадает с положением *источника* света в системе S . Тогда для наблюдателя в системе S´ уравнение сферического волнового фронта должно иметь следующий вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 . \qquad (2)$$

Величина скорости света здесь *та же*, что и в неподвижной системе отсчёта S .

Предположим, что система отсчёта S´ движется в направлении + x с постоянной скоростью **v** *по отношению* к системе отсчёта S . В отличие от преобразования Галилея

$$y' = y , \quad z' = z , \quad x' = x - vt , \quad t' = t \qquad (3)$$

рассмотрим преобразование Лоренца

$$y' = y , \quad z' = z , \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \qquad (4)$$

Подставим (4) в (2) :

$$\frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = c^2 \frac{\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Раскроем скобки, возведя их в квадрат:

$$\frac{x^2 - 2xvt + v^2 t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = c^2 \frac{t^2 - \frac{2vt}{c^2} x + \frac{v^2}{c^4} x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Дроби в левой и правой части можно объединить, взаимно уничтожить слагаемые 2xvt, перенести из левой дроби в правую слагаемое $v^2 t^2$, а слагаемое $(v^2/c^2)x^2$ перенести из правой в левую дробь:

$$\frac{x^2 - \frac{v^2}{c^2} x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = \frac{c^2 t^2 - v^2 t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

После сокращения числителя и знаменателя левой и правой дроби получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 . \qquad (5)$$

Как видим, уравнения *волновых фронтов* (1) и (5) полностью *совпадают.* Этот результат свидетельствует, что, несмотря на *движение* системы отсчёта S´ , свет достигает *тех же* точек и за то же время, что и в *неподвижной* системе отсчёта S . Таким образом, преобразование Лоренца не является только *формальным* преобразованием координат и времени. *Физический* смысл этого преобразования заключён в понимании того, что в *движущейся* с большой скоростью системе отсчёта *сокращается* время прихода света в наблюдаемую точку.

Краеугольным камнем, обеспечившим переход от частной, специальной, к общей теории относительности, стало объединение пространственных x,y,z и временной координаты ct в *единую* систему пространства и времени. Это было уже *после* опубликования работы «К электродинамике движущихся тел» (1905 г.) . Основные положения математической теории пространства – времени, известного как «Пространство Минковского» [*]), сводятся к следующему:

Траектория частицы описывается «вектором», квадрат которого равен $u^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$, а

для светового луча $u^2 = 0$, откуда $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$, *уравнение* геометрического места точек

сферического волнового фронта, причём рассматриваются и случаи $u^2 < 0$ **).

Метрика 4 мерного пространства описывается дифференциальной формой квадрата дуги ds :

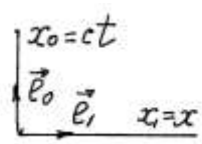
$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$, где $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Матрица метрического тензора псевдоевклидова пространства, составленная из *коэффициентов*

дифференциальной формы :

$$g_{ij}(i, j = 1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор обладает свойством *инвариантности*: его матрица сохраняет вид при преобразованиях в одном пространстве. Пусть, к примеру, система координат S′(x′,y′z′,t′) *движется* со скоростью v по отношению к *неподвижной* системе координат S(x,y,z,t). Для упрощения вычислений рассмотрим *двумерное* пространство в базисе $\vec{e}_0, \vec{e}_1$ с координатами x_0, x_1 , где $x_0=ct$, $x_1=x$, т.е. с одной *пространственной* координатой



При этом матрица метрического тензора будет записана в следующем виде:

$$g_{ij}(i, j = 1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_0\vec{e}_0 & \vec{e}_0\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1\vec{e}_0 & -\vec{e}_1\vec{e}_1 \end{pmatrix}.$$

Разложим векторы базиса *движущейся* системы отсчёта по векторам *неподвижной* системы:

$$\vec{e}_0^{'}=b_0^0\vec{e}_0+b_0^1\vec{e}_1$$
$$\vec{e}_1^{'}=b_1^0\vec{e}_0+b_1^1\vec{e}_1 \quad .$$

Вычислим элементы матрицы метрического тензора в *движущейся* системе координат:

$$\vec{e}_0^{'}\vec{e}_0^{'} = \left(b_0^0\vec{e}_0+b_0^1\vec{e}_1\right)\left(b_0^0\vec{e}_0+b_0^1\vec{e}_1\right)=+1$$
$$\vec{e}_1^{'}\vec{e}_1^{'} = \left(b_1^0\vec{e}_0+b_1^1\vec{e}_1\right)\left(b_1^0\vec{e}_0+b_1^1\vec{e}_1\right)=-1$$
$$\vec{e}_0^{'}\vec{e}_1^{'} = \left(b_0^0\vec{e}_0+b_0^1\vec{e}_1\right)\left(b_1^0\vec{e}_0+b_1^1\vec{e}_1\right)= 0 \quad .$$

После перемножения с учётом $\vec{e}_0\vec{e}_0=1, \vec{e}_1\vec{e}_1=-1, \vec{e}_1\vec{e}_0=\vec{e}_0\vec{e}_1=0$:

$(b_0^0)^2$ - $(b_0^1)^2$ = 1 , $(b_1^0)^2$ - $(b_1^1)^2$ = - 1 , $b_0^0 b_1^0$ - $b_0^1 b_1^1$ = 0 .

.

Обозначив $b_0^1/b_0^0=\beta,$ найдём $b_0^0=b_1^1=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$, $b_1^0=b_0^1=\dfrac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$.

Знаки при извлечении квадратного *корня* выбираются по физическому смыслу полученных далее решений. Мы получили матрицу преобразования *базисных* векторов и соответственно *координат*:

$$\begin{pmatrix} b_0^0 & b_0^1 \\ b_1^0 & b_1^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_0^{'} \\ x_1^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_0^0 & b_0^1 \\ b_1^0 & b_1^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

, перемножив матрицы, найдём

$$x_0^{'} = \frac{x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_0-\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_1^{'} =$$

$$-\frac{\beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{x_1-\beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad .$$

---

*) Работы в области 4-мерного пространства были выполнены Г.Минковским, у которого Эйнштейн, будучи студентом, изучал математику.

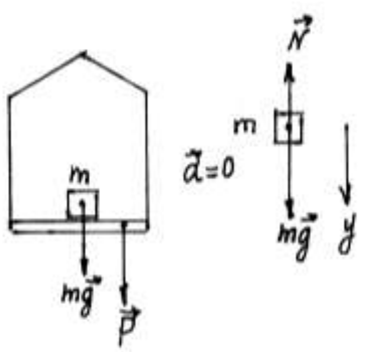
**) Рассматривается пространство, где скалярный квадрат вектора может быть *отрицательным*.

Подставив $x_0 = ct$, $x_1 = x$ и $x_0^{'} = ct^{'}$, $x_1^{'} = x^{'}$, приходим к Преобразованию Лоренца:

$$x^{'} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad\qquad t^{'} = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ .$$

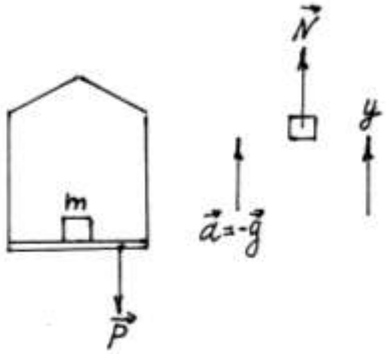
Переход к *ускоренному* движению (в связи с тяготением) произошёл, по словам Эйнштейна, в результате наблюдения человека, *падающего* с крыши. Рассмотрим в качестве *примера* космический корабль в гравитационном поле и вне его. Пусть ракетные двигатели поднимают космический корабль с человеком, сидящим на полу этого корабля. Пусть космический корабль вблизи поверхности Земли, где действует сила тяготения (притяжения к земле), движется без ускорения. При выходе из зоны земного притяжения тот же двигатель придаёт кораблю ускорение : $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ - ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли. Что будет с *силой давления* человека на дно космического корабля?

Рассмотрим оба случая. Обозначим силу давления человека на дно корабля **P** – *вес* тела, приложенный к *опоре*. Отбрасывая опору, обозначим её *реакцию* **N** , приложенную к *телу* человека массой m . Запишем силы в виде *проекций* на выбранную ось y и составим уравнения по 2 закону Ньютона.



$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - \mathbf{N}$
$0 = m\mathbf{g} - \mathbf{N}$,
$0 = mg - N$, откуда $N = mg$.

$\mathbf{P} = -\mathbf{N}$, $P = N = mg$.



$m\mathbf{a} = \mathbf{N}$, $ma = N$
$\mathbf{P} = -\mathbf{N}$, $P = N = ma$

В обоих случаях (a = g) сила давления человека на опору **P** = m**g**. С точки зрения ощущений человека, он не чувствует разницы в ситуации, когда корабль переходит от инерциального к ускоренному движению: как находился в покое, так и остаётся в этом положении. А.Эйнштейн на основе «принципа эквивалентности» (сила инерции – так иногда называют произведение массы на ускорение – *эквивалентна* силе тяготения) указал, что мы не можем говорить об *абсолютном* ускорении системы отсчёта, находясь *внутри* этой системы. В этом формальная аналогия с частной (специальной) теорией относительности, где мы не можем говорить о движении системы отсчёта, находясь внутри этой системы. Из «принципа эквивалентности» также следует, что *массы*, инерционная и гравитационная, равны.

После **Специальной** теории относительности, установившей *равноправие* всех инерциальных систем отсчёта в отношении движения тел и распространения света, перед Эйнштейном встал вопрос: не существует ли такое же равноправие для всех систем отсчёта, в том числе *ускоренных*, в отношении всевозможных физических явлений? На такой взгляд мог, в частности, повлиять интерес к математическому аппарату *тензорного* исчисления, с помощью которого возможно описание одних и тех же процессов в *разных* системах координат *одним* тензорным уравнением. Так возникло название новой теории – **Общая** теория относительности. Принцип *эквивалентности* гравитации и ускорения сыграл свою роль в том, что Эйнштейн теперь сосредоточился на конкретном явлении – *тяготении* – и пришёл к принципиальному пониманию *взаимной* связи тяготения с *геометрией* пространства. К 1915 году для этой связи было найдено выражение в форме следующего уравнения:

$$-\chi T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad ,$$

где χ – постоянная тяготения Эйнштейна, T_{ij} – тензор плотности масс, R_{ij} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, g_{ij} – метрический тензор. Это уравнение было решено в *ньютоновом* приближении, и найдена связь с постоянной k закона Всемирного тяготения Ньютона:

$$\frac{\chi c^4}{8\pi} = k \ , \quad \text{откуда} \quad \chi = \frac{8\pi k}{c^4} \quad .$$

Экспериментальная проверка состоялась спустя несколько лет астрономическими наблюдениями во время одного из солнечных затмений

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», М., Наука, 1999, 294с.
2. Оханьян Х.С. «Эйнштейн – настоящая история великих открытий» (пер. с англ. Н.В.Виноградовой), М., Эксмо, 2009, 384с.
3. Reznick R. «Basic Concepts Relativity», Introduction to special Relativity, N.Y., John Wiley&Sons, 1968.